Задача 1. Предложите алгоритм, который за $O(m)$ строит компоненты рёберной двусвязности. Компонентой вершинной двусвязности графа называется максимальный по включению подграф (состоящий из вершин и ребер), такой что любые два ребра из него лежат на вершинно-простом цикле.

Задача 2. Дан невзвешенный неориентированный граф. Требуется найти кратчайший путь между двумя вершинами в его дополнении. Время работы должно составлять $O(n+m)$.

Задача 3. Рассмотрим некоторый неориентированный граф. Удалим все его рёбра и будем добавлять из заново в некотором порядке. Требуется добавлять рёбра по одному и после каждого добавления сообщать количество мостов в графе. Порядок добавления изначально не известен, то есть запросы требуется обрабатывать online. Общее время работы должно составить $O(m \log m)$.

Задача 4. В изначально пустой двудольный граф по очереди добавляются рёбра, всего происходит m добавлений. После каждого добавления необходимо говорить размер максимального паросочетания. Суммарное время работы должно составлять $O(nm)$

Задача 5. Дан ориентированный ациклический граф. Предложите алгоритм поиска минимального по мощности множества путей, покрывающих все вершины графа.

a) Пути не могут пересекаться по вершинам, время работы $O(nm)$.

b) Пути могут пересекаться по вершинам, время работы $O(n^3)$.

— — —

Определение. $\alpha(n, m)$ — обратная функция акермана от параметров n и m (Для СНМ это время выполнения m запросов к СНМ из n элементов).

Задача 6. Дан граф на n вершинах и m рёбрах, а также $q \le m$ запросов удаления рёбер. После каждого запроса необходимо узнать количество компонент связности. Время $\mathcal{O}(n + m \cdot \alpha(m, n))$.

Задача 7. Дан граф на n вершинах, а также q запросов. Каждый запрос — ребро (u, v). Если после добавления этого ребра граф является двудольным, необходимо добавить его, иначе добавлять его не нужно. Для каждого запроса узнать, было ли добавлено ребро. Время:

а) $\mathcal{O}(n + q \log n)$;

б) $\mathcal{O}(n + q \cdot \alpha(q, n))$.

Задача 8. Даны n клеток, покрашенных в цвет 0, а также q запросов покраски отрезка $[l; r]$ в цвет c. Для каждой клетки найти итоговый цвет. Время $\mathcal{O}(n + q \cdot \alpha(q, n))$.

Задача 9. Дан пустой массив. Отвечать *в онлайне* на запросы:

1. Добавить элемент x в конец массива.
2. Найти минимум на суффиксе длины l.

Выполнять q запросов амортизированно за $O(q \cdot \alpha(q, q))$. *Обратите внимание, что такую структуру данных можно использовать для решения задачи поиска минимума на отрезке в оффлайн.*

— — —

Определение. Минимально узкое остовное дерево — остовное дерево с минимальным весом максимального по весу ребра.

Задача 10. Является ли:

а) минимальное остовное дерево минимально узким остовным деревом?

б) минимально узкое остовное дерево минимальным остовным деревом?

Задача 11. Дан взвешенный граф на n вершинах и m рёбрах, а также какой-то его остов. Проверьте, что этот остов является минимально узким. Время $\mathcal{O}(n + m \log m)$.

Задача 12. Дан граф на n вершинах и m рёбрах, а также q запросов поиска максимального по весу ребра в пути между v и u с минимальным весом максимального по весу ребра. Время $\mathcal{O}(n + m \log m + q \log n)$.

— — —

Задача 13. Дан ориентированный ациклический граф. Вершина A называется важной, если для любой другой вершины B существует путь либо из A в B, либо из B в A. Требуется за $O(n+m)$ найти все:

a) Важные вершины

b) Такие вершины, что при удалении какой-то одной вершины из графа она становится важной.

Задача 14. Требуется за $O(n+m)$ найти какую-нибудь вершину, лежащую в пересечении всех циклов ориентированного графа.

Задача 15. Дан двудольны граф и некоторое максимальное паросочетание в нём. Требуется:

a) За $O(nm)$ найти все рёбра, лежащие во всех максимальных паросочетаних.

b) За $O(nm)$ найти все рёбра, лежащие хотя бы в одном максимальном паросочетании.

c) За $O(m)$ найти все рёбра, лежащие во всех максимальных паросочетаних.

в) За $O(m)$ найти все рёбра, лежащие хотя бы в одном максимальном паросочетании.

Задача 16. Дан двудольный граф, у каждой вершины есть вес. Требуется за $O(nm)$ построить паросочетание такое, что сумма весов всех вершин, входящих в паросочетание была максимальна, если:

a) Веса всех вершин второй доли равны нулю.

b) Веса всех вершин неотрицательны.