# Центроид декомпозиция

Филипп Грибов

29.09.2018

## 1 Центроид

### 1.1 Задача http://codeforces.com/contest/321/problem/C

Центроид — вершина дерева, такая что у любого её поддерева размер $\leq n/2$.

Чтобы решить приведённую выше задачу, найдём центроид в дереве. Поставим туда букву «A». Любой путь из одного из поддеревьев этой вершины в другое будет проходить через «A». Осталось обработать случаи, когда и начало и конец пути лежат в одном поддереве центроида.

Рассмотрим каждое из поддеревьев. Найдём в них их центроиды. Будем называть их центроидами второго порядка у начального дерева. В каждый из центроидов второго порядка запишем «B». Рассмотрим поддеревья центроидов второго порядка. В ниих тоже есть центроиды. Назовём их центроидами третьего порядка. В каждый центроид тертьего порядка запишем «C». Аналогично у нас будут центроиды четвёртого порядка, в которые мы запишем «D» и т.д.

Замечаем, что поддеревья центроида $i$-го порядка имеют размер не более $\frac{n}{2^i}$. Тогда максимальный возможный порядок центроида — $\log_2 n$.

Замечаем, что любой путь, соединяющий какие-то 2 центроида $i$-го порядка проходит через центроид $i-1$го порядка. Так же любая вершина является центроидом какого-то порядка. Тогда задача решена.

### 1.2 Алгоритм построения

#### 1.2.1 Массивы

$C[a]$ — порядок центроида вершины $a$
$P[n][i]$ — номер центроида $i$-го порядка, в поддереве которого лежит вершина $a$

#### 1.2.2 Поиск центроида

Подвесим дерево за любуб вершину. У центроида размер поддерева $\geq n/2$, так как иначе всё, что сверху имеет размер $> n/2$.

Среди всех вершин, размер поддерева которых $\geq n/2$, возьмём вершину с минимальным размером поддерева. Если бы у какого-нибудь из её детей размер поддерева был бы $\geq n/2$, то наша вершина не была бы минимальной среди таких. Тогда у весх её детей размер поддерева $\leq n/2$. Так как у этой вершиины размер поддерева $\geq n/2$, то у того, что сверху размер $\leq n/2$. Тогда эта вершина центроид.

Самый лёгкий способ найти её — запустится $dfs$-ом от любой вершины дерева, у каждой узнать размер поддерева. Далее спускаться из начальной вершины в ребёнка с максимальным размером до тех пор, пока его размер $\geq n/2$ (таких детей всегда не больше одного).

После этого находим центроид и запоминаем порядок вершины. После чего запускаемся $dfs$-ом от этой вершины и заполняем $P[a][0]$ для всех $a$.

Для поиска центроидов второго порядка запускаемся рекурсивно поиском центроида от кажого из детей центроида первого порядка. Делаем всё тоже самое, что мы делали при поиске центроида первого порядка, но не звходим в те вершины, порядок которых мы уже узнали. Так мы сделаем центроид декомпозицию.

Для упрощения кода можно объединить первй и второй $dfs$ на каждой итерации.

## 1.3 Задачи

### 1.3.1 Число путей длины $X$

### 1.3.2 Расстояние между вершинами в онлайне за $O(\log\log n)$ и $O(1)$

### 1.3.3 Минимум на пути за $O(\log\log n)$ и $O(1)$

### 1.3.4 Включить вершину и найти ближайшую включённую

### 1.3.5 Что нибудь посложнее типа `http://codeforces.com/contest/379/problem/F`